Asymétrie des rendements et volatilité multifractale

Emmanuel Bacry [1], Laurent Duvernet [2],
Jean-François Muzy [3]

Séminaire du Labex MME-DII
26 février 2013

1. CNRS – École Polytechnique
2. Univ. Paris-Ouest Nanterre
3. CNRS – Univ. de Corse

Pourquoi des modèles multifractals en finance ?

Processus de cascades

Un modèle asymétrique

Pourquoi des modèles multifractals en finance ?

Processus de cascades

Un modèle asymétrique

Généralités sur les données financières

Soit $X(t)$ le prix (logarithmique) d'un actif financier à la date t. Alors

- Les accroissements de X sont **décorrélés** — absence d'arbitrage : X est une **martingale.**
- Les fluctuations ne sont pas gaussiennes, importance des **évènements extrêmes.**
- Le carré des accroissements sont très corrélés : **mémoire longue** de la volatilité.
- Ces régularités sont « universelles », quel que soit l'actif considéré, mais aussi quel que soit le pas de temps (> 5 minutes) : **invariance d'échelle** des données.

Des modèles réalistes

- Accroissements décorréles :

$$X(t) - X(t-1) = \sigma\varepsilon(t) \quad \text{ou} \quad X(t) = \sigma B(t).$$

- Événements extrêmes :

$$X(t) = \sigma(B(t) + N(t)).$$

- La volatilité σ est elle-même aléatoire :

$$X(t) = \int_0^t \sigma(u)(\mathrm{d}B(u) + dN(u)).$$

- Corrélations longue portée de la volatilité :

$$X(t) = \int_0^t \sigma(u)(\mathrm{d}B(u) + dN(u)), \quad \sigma(t) = \int_0^t \tilde{\sigma}(u)\mathrm{d}\tilde{B}^H(u).$$

Des modèles réalistes

- Accroissements décorréles :

$$X(t) - X(t-1) = \sigma\varepsilon(t) \quad \text{ou} \quad X(t) = \sigma B(t).$$

- Événements extrêmes :

$$X(t) = \sigma(B(t) + N(t)).$$

- La volatilité σ est elle-même aléatoire :

$$X(t) = \int_0^t \sigma(u)(\mathrm{d}B(u) + dN(u)).$$

- Corrélations longue portée de la volatilité :

$$X(t) = \int_0^t \sigma(u)(\mathrm{d}B(u) + dN(u)), \quad \sigma(t) = \int_0^t \tilde{\sigma}(u)\mathrm{d}\tilde{B}^H(u).$$

Des modèles réalistes

- Accroissements décorréles :

$$X(t) - X(t-1) = \sigma\varepsilon(t) \quad \text{ou} \quad X(t) = \sigma B(t).$$

- Événements extrêmes :

$$X(t) = \sigma(B(t) + N(t)).$$

- La volatilité σ est elle-même aléatoire :

$$X(t) = \int_0^t \sigma(u)(\mathrm{d}B(u) + dN(u)).$$

- Corrélations longue portée de la volatilité :

$$X(t) = \int_0^t \sigma(u)(\mathrm{d}B(u) + dN(u)), \quad \sigma(t) = \int_0^t \tilde{\sigma}(u)\mathrm{d}\tilde{B}^H(u).$$

Des modèles réalistes

- Accroissements décorréles :

$$X(t) - X(t-1) = \sigma\varepsilon(t) \quad \text{ou} \quad X(t) = \sigma B(t).$$

- Événements extrêmes :

$$X(t) = \sigma(B(t) + N(t)).$$

- La volatilité σ est elle-même aléatoire :

$$X(t) = \int_0^t \sigma(u)(\mathrm{d}B(u) + dN(u)).$$

- Corrélations longue portée de la volatilité :

$$X(t) = \int_0^t \sigma(u)(\mathrm{d}B(u) + dN(u)), \quad \sigma(t) = \int_0^t \tilde{\sigma}(u)\mathrm{d}\tilde{B}^H(u).$$

Peut-on avoir un modèle réaliste et « simple » ?

- Plus on cherche à se rapprocher des régularités statistiques observées dans la pratique, plus le coût est élevé en termes du **nombre de paramètres** et de la robustesse du modèle.
- Pour des applications pratiques, les modèles naïfs sont peut-être les meilleurs...
- Approche multifractale : initialement proposée en turbulence pleinement développée pour modéliser événements extrêmes, mémoire longue et invariance d'échelle.
- Depuis 2000, modèles multifractals réalistes avec un petit nombre de paramètres. Bonnes performances sur des applications comme la prédiction de risque.

Invariance d'échelle

- Invariance d'échelle « simple » : le signal présente **la même régularité à tout instant et à toute échelle.**
- Exemple : mouvement brownien (fractionnaire), pour tout $r > 0$
$$B^H(rt),\ t \geq 0 \stackrel{loi}{=} r^H B(t), t \geq 0$$
(H = 1/2 pour le mouvement brownien standard).
- Mouvement brownien fractionnaire de paramètre $1/2 < H < 1$: processus gaussien à accroissements stationnaires avec corrélation longue portée. Cf. processus FARIMA en économétrie.

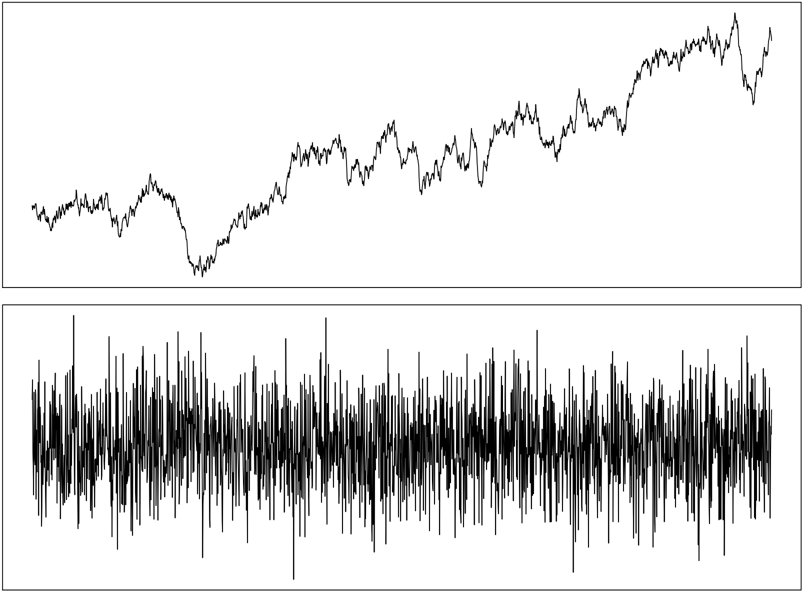


FIGURE : Mouvement brownien, $H = 0.5$.

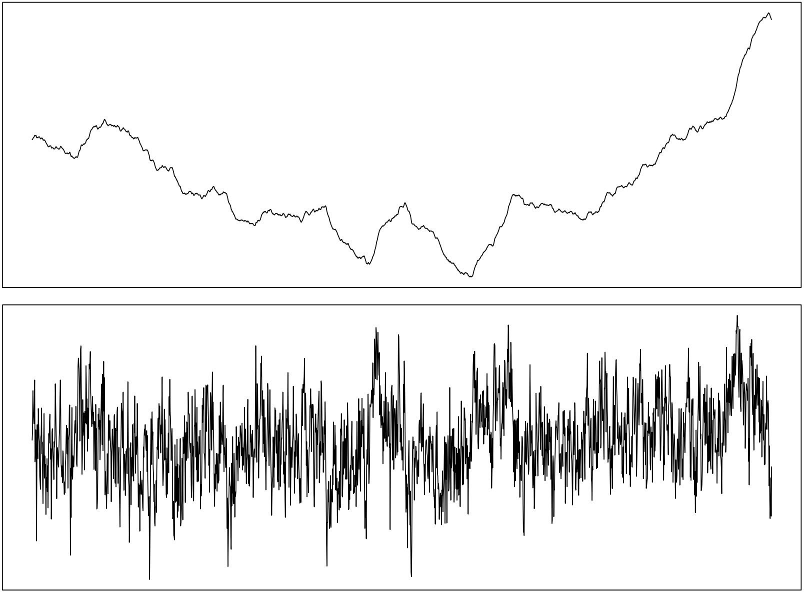


FIGURE : Mouvement brownien fractionnaire, $H = 0.7$.

Invariance d’échelle

- En turbulence pleinement dévoloppée comme en finance, à toute échelle on constate une alternace de phases agitées et de phases calmes.
- Analyse multifractale : cadre mathématique pour rendre compte de cette invariance d’échelle complexe. La régularité du signal **varie à chaque instant**.

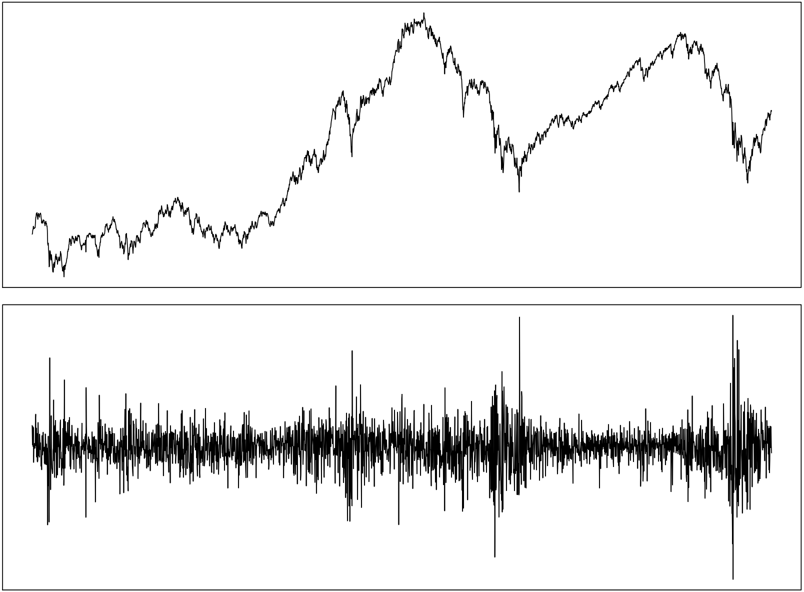


FIGURE : Variations journalières du CAC 40.

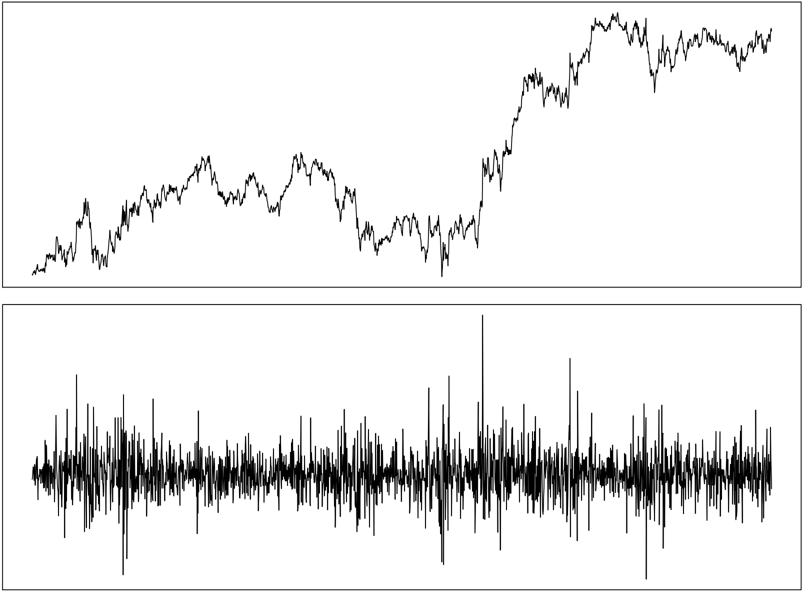


FIGURE : Marche aléatoire multifractale.

Pourquoi des modèles multifractals en finance ?

Processus de cascades

Un modèle asymétrique

Construction de processus aléatoires multifractals

- 1960s — Kolmogorov, Yaglom
- 1970s — Mandelbrot, Kahane et Peyrière
- 2000 — deux constructions en finance. Calvet et Fisher : *Markov Switching Multifractal model*, Bacry et Muzy : *Multifractal Random Walk*.

Markov Switching Multifractal

(Calvet et Fisher, 2000)

$$X(t) = \int_0^t \sigma(u)\mathrm{d}B(u),$$

B mouvement brownien standard, σ processus de volatilité indépendant de B :

$$\sigma(t) = \sigma W_0(t) \dots W_J(t)$$

où les $W_j(t)$ sont des variables aléatoires **indépendantes positives et d'espérance 1**, et qui changent de valeur avec une **fréquence moyenne (une intensité) de $c\, b^j$.**
Interprétation : les $W_j(t)$ sont des **flux de nouvelles** qui arrivent à différentes vitesses.

Multifractal random walk

(Bacry, Delour et Muzy 2000.) On remplace $W_0(t) \dots W_J(t)$ par l'exponentielle d'un **processus gaussien stationnaire.**

$$X(t) = \lim_{l \to 0} \int_0^t \mathrm{e}^{w_l(u)} \, \mathrm{d}B(u)$$

avec $\big(w_l(u),\ u \geq 0,\ l > 0\big)$ un proc. gauss. stat. tel que $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{w_l(u)}\right] = 1$ et

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[w_l(u), w_l(u')\right] \uparrow \lambda^2 \log(T/|u-u'|)$$

pour $0 < |u-u'| < T$ et $l \to 0$, et

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[w_l(u), w_l(u')\right] = 0 \text{ pour } |u-u'| \geq T.$$

Propriétés

- Deux constructions d'une martingale multifractale.
- Processus de volatilité très corrélé, pas de moments à tout ordre dans les limites $J \to \infty$ ou $l \to 0$.
- Avantage de la construction log-normale : autosimilarité stochastique. Pour $r \in (0, 1)$

$$X(rt),\ t \in [0, T] \stackrel{d}{=} r^{1/2} \mathrm{e}^{w_r/2} X(t),\ t \in [0, T],$$

  où $w_r \sim \mathcal{N}(\lambda^2 \log r/2, -\lambda^2 \log r)$.
- Très bonnes performances sur des applications comme la **prédiction de volatilité**.
- Une critique du modèle est qu'il est **symétrique**, *vs.* certaines données — pas de skewness, invariance par retournement dans le temps.

Asymétrie des cours d'actions et d'indices

On observe sur certains actifs la double asymétrie suivante :

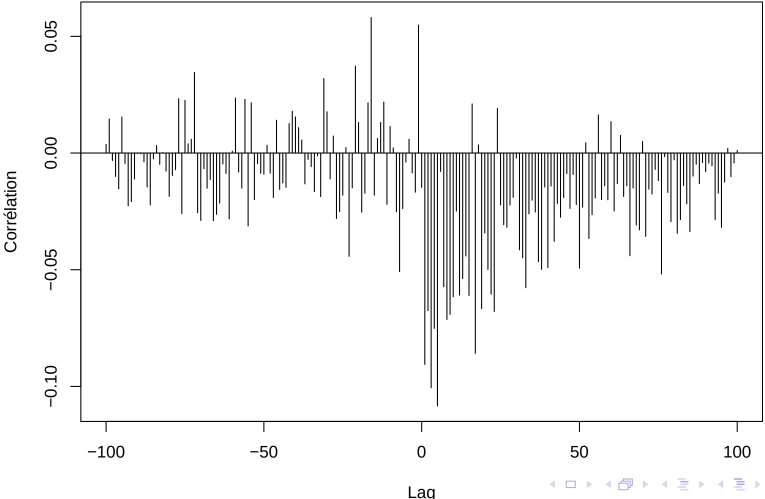
- une *skewness* négative des accroissements.
- un **effet levier**, ie. une **corrélation négative entre l'accroissement du prix aujourd'hui et la volatilité demain** (carré ou valeur absolue de l'accroissement).

Interprétation : « panique » sur le marché, une forte baisse augmente l'instabilité. Cependant, on peut nuancer :

- Ce n'est pas vrai pour tout actif (p. ex. taux de change).
- Même sur les actions ou les indices on est généralement **au seuil de la significativité**.

Asymétrie et leverage effect sur le CAC40

Corrélation entre $X(t) - X(t-1)$ et $(X(t+k) - X(t+k-1))^2$, données journalières, $-100 \leq k \leq 100$.



Modèles asymétriques

- Différents auteurs (par ex. Bouchaud) ont étudié des modèles asymétriques non multifractals pour des cours d'action ou d'indice.
- Cadre MRW $X(t) = \lim_{l \to 0} \int_0^t \mathrm{e}^{w_l(u)} \, \mathrm{d}B(u)$: on voudrait une corrélation entre le brownien $B(u)$ et la volatilité $e^{w_l(u+\mathrm{d}u)}$
- Objectif : nouvelle construction qui préserve les « bonnes » propriétés du modèle MRW.
- Objectif **non rempli** ! Nous proposons un modèle $X(t) = \lim_{l \to 0} \int_0^t \mathrm{e}^{w_l(u)} \, \mathrm{d}B^{H}(u)$ où l'intégrant est un brownien fractionnaire, ce qui introduit des corrélations dans les accroissements du processus.
- Bizarrement, le problème est plus facile à traiter pour $H > 1/2 + \lambda^2/2$ que pour $H = 1/2$ (NB : en finance $\lambda \approx 0.02$).

La construction

Soit $\lambda^2 \in (0, 1/2)$ et $H \in (1/2 + \lambda^2/2, 1)$. On définit

$$X_l^H(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{w_l(u)} \varepsilon_l^H(u)\,\mathrm{d}u,$$

où $(\varepsilon_l^H(u), w_l(u))$ est une famille gaussienne qui possède une « bonne » structure de covariance : pour l, $l' \to 0$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\Big[w_l(t), w_{l'}(t')\Big] \uparrow \lambda^2 \log_+(T/|t-t'|),$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\Big[\varepsilon_l^H(t), \varepsilon_{l'}^H(t')\Big] \uparrow c^\varepsilon \sigma^2 |t-t'|^{-2+2H},$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\Big[\varepsilon_l^H(t), \omega_{l'}(t')\Big] \uparrow \begin{cases} c^{\varepsilon\omega}\sigma\lambda(t'-t)^{-1+H}, & \text{si } t' > t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Propriétés

- On a bien un processus asymétrique par la limite p.s.

$$X^H(t) = \lim_{l \to 0} X_l^H(t),\ t \geq 0.$$

- Ce processus satisfait l'autosimilarité stochastique

$$\big(X^H(rt),\ 0 \leq t \leq T\big) \stackrel{d}{=} r^H \mathrm{e}^{w_r} \big(X^H(t),\ 0 \leq t \leq T\big),$$

  où w_r est une variable aléatoire $N(\lambda^2 \log(r)/2, -\lambda^2 \log(r))$ qui est indépendante du processus X^H.
- On peut calculer explicitement les moments d'ordre entier $p \geq 2$; ceux-ci explosent à partir d'un seuil p^* qui dépend de λ.
- Les modèle n'est plus une **martingale**, on a des **corrélations** longue portée entre les accroissements !

Choix de H

Quand $H \downarrow 1/2 + \lambda^2/2$, $\mathbb{E}\left[X^H(t)^2\right] \to \infty$. Nous examinons donc le **processus normalisé**

$$Y^H(t) = -\frac{X^H(t)}{\mathbb{E}\left[\left(X^H(1)^2\right)\right]^{1/2}}.$$

Si $d = H - 1/2 - \lambda^2/2 \downarrow 0$, nous montrons que les accroissements $\delta_\tau Y^H(\cdot)$ de pas $\tau > 0$ satisfont :

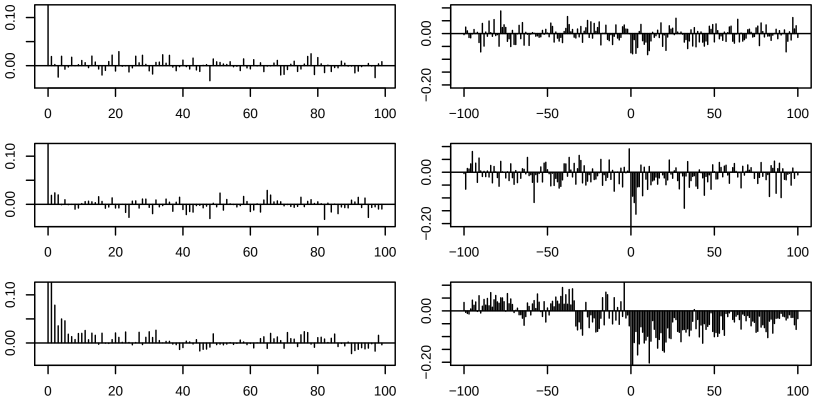
$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{orr}\left[\delta_\tau Y^H(0), \delta_\tau Y^H(k\tau)\right] &= O(d) && \text{pour } |k| \geq 1 \\
\mathbb{C}\mathrm{orr}\left[\delta_\tau Y^H(0), \delta_\tau Y^H(k\tau)^2\right] &= O(d^{1/2}) && \text{pour } k \geq 0 \\
\mathbb{C}\mathrm{orr}\left[\delta_\tau Y^H(0), \delta_\tau Y^H(k\tau)^2\right] &= O(d^{3/2}) && \text{pour } k \leq -1.
\end{aligned}$$

Par conséquent

- Nous ne voulons pas d'un régime $d \approx 0$.
- Nous ne voulons pas non plus d'un d grand.

Résultats de simulation

De haut en bas, $d = 0.01, 0.03, 0.06$. À gauche, l'autocorrélogramme des rendements, à droite, le corrélogramme des rendements et de leurs carrés.



Conclusion

- Modèle de prix financier un peu inhabituel du point de vue de ses propriétés mathématiques. Les accroissements sont corrélés, avec de la « mémoire longue », même si ces corrélations sont indiscernables de 0 !
- Cependant, nous avons l'impression reproduire de manière fine la dynamique jointe des accroissements du prix et de la volatilité.
- Applications : prévision de risque ? Extensions multidimensionnelles ?